Sujet de thèse de doctorat

Titre : Une approche numérique pour la platitude généralisée

Mots clefs : calcul symbolique-numérique, automatique, modélisation

Contacts

Joris van der Hoeven `<vdhoeven@lix.polytechnique.fr>`
François Ollivier `<francois.ollivier@lix.polytechnique.fr>`

Adresse

Laboratoire d'informatique de l'École polytechnique, LIX, UMR 7161 CNRS
Campus de l'École polytechnique, Bâtiment Alan Turing, CS35003
1 rue Honoré d'Estienne d'Orves
91120 Palaiseau, France

Directeur du laboratoire : M. Gilles Schaeffer (schaeffe@lix.polytechnique.fr)

Équipe d'accueil : MAX, Modélisation algébrique et calcul symbolique

Nous recherchons d'excellents candidats dotés d'une solide formation en mathématiques et en informatique. Le candidat doit être familier avec au moins une de thématiques suivantes : le calcul formel, l'algèbre différentielle, l'automatique, ou l'analyse numérique. Des compétences en programmation sont un atout.

Contexte

L'équipe MAX recherche des doctorants sur les thèmes du projet ERC ODELIX : *résoudre des équations différentielles de manière rapide, précise et fiable*. Ce sujet concerne les applications de ces thèmes à la théorie du contrôle.

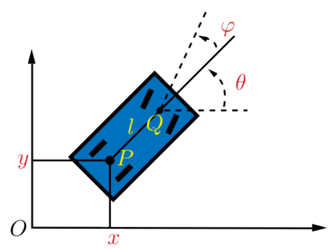
Description

Considérons le modèle d'un système physique, décrit par un système paramétrique d'équations différentielles ordinaires (ÉDOs)

$$x' = f(x, u),$$

où x est un vecteur de fonctions d'état et u un vecteur de fonctions de commande. On dit qu'un tel système est *plat* [1] s'il existe une paramétrisation locale $x_i = X_i(z_1, \ldots, z_m)$, où X_i est une fonction des fonctions z_j et d'un nombre fini de leurs dérivées, et les z_j sont des fonctions du temps qui peuvent être choisies arbitrairement. De plus, les z_j doivent être exprimées comme des fonctions différentielles de l'état et de la commande : $z_j = Z_j(x, u)$. Ces fonctions z_j sont appelées des *sorties plates*.

Une telle propriété facilite grandement la planification des mouvements, c'est-à-dire la conception d'une commande permettant de passer d'un point de départ donné à un objectif donné.



Une voiture est un exemple classique de système plat, pour lequel les coordonnées de n'importe quel point de l'axe arrière constituent une sortie plate.

Les systèmes génériques ne sont pas plats, mais la platitude est omniprésente en ingénierie [3], modulo quelques simplifications du modèle. Par exemple, un modèle d'avion classique est plat si l'on néglige les poussées créées par les actionneurs (ailerons, gouvernes de profondeur, gouvernail) [4]. La platitude facilite également la conception d'un bouclage qui peut compenser les perturbations mais aussi les erreurs de modèle [2].

Dans un article récent, il a été proposé d'améliorer le contrôle plat d'un avion en utilisant les valeurs des poussées dues aux actionneurs, fournies par la paramétrisation plate classique, afin de concevoir une nouvelle paramétrisation plus précise [5]. Ce processus peut être répété pour produire une planification très exacte pour le modèle d'avion sans simplification.

L'ordre des dérivées des sorties plates requises pour une telle paramétrisation augmente avec le nombre d'itérations, de sorte que cette paramétrisation plate généralisée dépend potentiellement d'un nombre infini de dérivées. On peut conjecturer que tous les systèmes seraient plats si on autorise des fonctions en un nombre infini de dérivées.

L'objectif est d'étudier cette notion de *platitude généralisée*. Selon les goûts et les compétences des candidats, cela peut se faire de plusieurs manières, en s'appuyant sur des expériences informatiques ou des investigations théoriques. Évidemment, un certain investissement sur des simulations informatiques sera nécessaire au préalable pour obtenir une intuition reposant sur des connaissances pratiques. On peut considérer par exemple une voiture avec deux remorques, qui est plate si les remorques sont attachées juste au-dessus de l'essieu arrière, mais pas dans le cas général [6]. Une paramétrisation plate généralisée peut être conçue en utilisant des méthodes d'itérations ou d'homotopie, c'est-à-dire en déplaçant lentement les points où les remorques sont attachées.

On peut aussi remarquer que la platitude généralisée permet de paramétrer des systèmes plats, en utilisant une fonction qui n'est pas une sortie réellement plate. Par exemple, y est une sortie plate pour le système $x = y'$ mais pas pour le système $x - \epsilon x' = y'$. Quoi qu'il en soit, on peut utiliser pour les petits ϵ la paramétrisation $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \epsilon^i y^{(i+1)}$.

On peut tirer parti des implémentations existantes dans MAPLE pour l'aéronautique et utiliser les outils plus efficaces fournis par MATHEMAGIX. Le champ des applications possibles est large et comprend tous les systèmes non plats et tous les systèmes plats pour lesquels on souhaiterait utiliser des ensembles de fonctions alternatifs qui ne sont pas de véritables sorties plates.

L'éventail des défis théoriques est également très large, à commencer par des preuves de convergence. On pourra aussi étudier l'unicité possible de cette paramétrisation plate généralisée.

Résultats attendus

Dans un premier temps, il faudra traiter des exemples classique comme la voiture à remorques, ce qui donnera lieu à des implantations dédiées. Ce travail sera consacré par une ou plusieurs publications.

Un travail plus orienté vers l'informatique devra comporter la réalisation d'un code générique efficace, couvrant une large classe d'exemples, accompagné d'une étude de complexité, de benchmarks, et d'une étude de la précision des résultats obtenus. Ceci donnera également lieu à une ou plusieurs publications.

On attend une contribution minimale à l'aspect théorique, au moins dans le cas linéaire. Un travail plus orienté vers les aspects matématiques du contrôle devra s'attacher à fournir des définitions précises et à rendre compte du comportement expérimental par des énoncés prouvés, portant sur la convergence des calculs et leur précision.

Bien entendu, la liste ci-dessus est purement indicative et pourra être adaptée en fonction du profil du candidat. Les logiciels seront distribués sous une licence de logiciel libre et les publications auront lieu dans des revues ou actes de conférence de premier plan du domaine, tels que JSC, AAECC, ISSAC, etc.

Bibliographie

[1] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., et ROUCHON, P. Flatness and defect of non-linear systems: introduction theory and examples. *Int. Journal of Control 61*, 6 (1995), 1327–1361.

[2] KAMINSKI, Y. et OLLIVIER, F. Flat singularities of chained systems, illustrated with an aircraft model. *Computational and Applied Mathematics 43*, 135 (2024).

[3] LÉVINE, J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach*. Mathematical Engineering. Springer, 2009.

[4] MARTIN, P. Aircraft control using flatness. Dans *CESA'96 – Symposium on Control, Optimization and Supervision* (Lille, France, 1996), IMACS/IEEE-SMC Multiconference, 194–199.

[5] OLLIVIER, F. Extending flat motion planning to non-flat systems. experiments on aircraft models using maple. Dans *ISSAC '22: International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Villeneuve-d'Ascq, France, July 4 - 7, 2022* (2022), MAZA, M. M. et ZHI, L., Eds., ACM, 499–507.

[6] ROUCHON, P., FLIESS, M., LÉVINE, J., et MARTIN, P. Flatness and motion planning: the car with n trailers. Dans *Proc. European Control Conference* (1993), 1518–1522.