

Sujet de thèse de doctorat

Title: Résolution effective d'équations différentielles dans les transséries

Keywords: calcul formel ; asymptotique automatique ; séries généralisées

Contact

Joris van der Hoeven <vdhoeven@lix.polytechnique.fr>

Adresse

Laboratoire d'informatique de l'École polytechnique, LIX, UMR 7161 CNRS

Campus de l'École polytechnique, Bâtiment Alan Turing, CS35003

1 rue Honoré d'Estienne d'Orves

91120 Palaiseau, France

Nous recherchons d'excellents candidats dotés d'une solide formation en mathématiques et en informatique. Le candidat doit être familier avec les bases du calcul formel. Des connaissances en algèbre différentielle sont un atout.

Description

Comment calculer de manière exacte et fiable avec des fonctions spéciales dans les systèmes de calcul formel ? Une stratégie consiste à adopter une approche locale et à représenter systématiquement ces fonctions à l'aide de séries formelles autour d'un point non singulier. Par exemple, la fonction $f(z) := \exp(\sin(z))$ est l'unique solution en série du système d'équations $f'(z) = c(z) f(z)$, $c'(z) = -s(z)$, $s'(z) = c(z)$, avec les conditions initiales $f(0) = 1$, $c(0) = 1$, $s(0) = 0$. En supposant ce type de représentation, comment vérifier des égalités telles que $s(z)^2 + c(z)^2 = 1$?

Il est clair qu'il suffit d'avoir un algorithme pour vérifier si une expression donnée représente la fonction nulle. Lorsque toutes les séries formelles sont données comme solutions d'équations différentielles explicites avec des conditions initiales explicites, plusieurs algorithmes ont été proposés pour ce problème de test de nullité [2, 7, 6, 5]. Un premier défi consiste à mettre en œuvre un ou plusieurs de ces algorithmes et à étudier les améliorations possibles.

Un deuxième défi concerne le calcul de la solution générique en série formelle d'un système d'équations différentielles ordinaires si les conditions initiales ne sont pas ou seulement partiellement spécifiées. Cela nécessite une extension de la théorie au cas où les coefficients de la série dépendent de paramètres. Par exemple, en posant $\delta := z \partial / \partial z$, la solution générale de l'équation $(\delta f)^2 - f \delta^2 f = 0$ est $f = c z^n$, où c est une constante arbitraire et $n \in \mathbb{N}$ un entier non négatif arbitraire.

L'objectif principal de la thèse est de généraliser davantage cette théorie en passant des solutions sous forme de séries formelles ordinaires aux solutions en *transséries* [3, 4, 1]. Une transsérie est une série formelle généralisée qui peut contenir de manière récursive des exponentielles et des logarithmes. Par exemple, $\int e^{e^x} = e^{e^x-x} + e^{e^x-2x} + 2e^{e^x-3x} + \dots$ et $W(x) := (x e^x)^{\text{inverse}} = \log x - \log \log x + \frac{\log \log x}{\log x} + \dots$ sont des séries transséries à l'infini $x \rightarrow \infty$. Les transséries apparaissent naturellement lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions aux équations différentielles ordinaires. En fin de compte, nous aimerions avoir des tests de nullité efficaces pour les transséries et des algorithmes pour résoudre des équations différentielles dans le corps des transséries.

Méthodologie

La thèse débutera par une étude de la littérature existante. Ensuite, des cas de plus en plus difficiles de tests de nullité et de résolution d'équations différentielles seront considérés. En fonction de son profil, le ou la doctorant(e) peut choisir de mettre davantage l'accent sur les aspects théoriques ou pratiques du problème. Les implémentations logicielles pourront être réalisées en C++, Julia, Mathmagix ou un mélange de ces langages et distribuées sous forme de logiciel libre.

Résultats attendus

La partie théorique de la recherche devrait au moins conduire à un nouveau test de nullité pour les transséries différentiellement algébriques. De plus, nous espérons que des progrès seront réalisés sur le calcul des solutions en séries formelles et en transséries aux équations différentielles.

Les algorithmes seront testés au moins sur des implémentations jouets. En fonction de son profil, le ou la doctorant(e) pourra choisir de développer une implémentation plus avancée qui pourra être distribuée sous forme de bibliothèque.

Les nouveaux résultats seront publiés dans des revues ou des actes de conférence de premier plan dans le domaine, tels que JSC, AAECC, ISSAC, etc.

Bibliographie

- [1] M. Aschenbrenner, L. van den Dries, et J. van der Hoeven. *Asymptotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries*. Nombre 195 dans *Annals of Mathematics studies*. Princeton University Press, 2017.
- [2] J. Denef et L. Lipshitz. Power series solutions of algebraic differential equations. *Math. Ann.*, 267:213–238, 1984.
- [3] J. Écalle. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Hermann, collection: Actualités mathématiques, 1992.
- [4] J. van der Hoeven. *Transseries and real differential algebra*, volume 1888 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2006.
- [5] J. van der Hoeven. Computing with D-algebraic power series. *AAECC*, 30(1):17–49, 2019.
- [6] A. Péladan-Germa. *Tests effectifs de nullité dans des extensions d'anneaux différentiels*. PhD thesis, Gage, École Polytechnique, Palaiseau, France, 1997.
- [7] J. Shackell. Zero equivalence in function fields defined by differential equations. *Proc. of the AMS*, 336(1):151–172, 1993.